INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

VESTIBULAR 2026

2ª FASE

MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

1. Esta prova tem duração de **quatro horas**.
2. Não será permitido deixar o local de exame antes de **duas horas** decorridas do início da prova.
3. É permitido usar **apenas** caneta esferográfica de corpo transparente, lápis ou lapiseira, borracha, régua simples transparente e compasso. Qualquer outro material escolar é **proibido.**
4. Você recebeu este **caderno de questões** e um **caderno de soluções.**
5. Não é permitido destacar folhas de nenhum dos cadernos.
6. O caderno de questões contém **10 questões dissertativas** numeradas de 01 a 10.
7. As **resoluções** devem ser apresentadas no **caderno de soluções**, exclusivamente nos espaços delimitados para cada questão. Somente as respostas registradas nesses espaços serão consideradas para correção. As páginas de rascunho não serão avaliadas.
8. Nas questões que envolvem cálculos, as expressões numéricas devem ser resolvidas **integralmente**, caso contrário haverá desconto na nota.
9. A devolução dos dois cadernos (questões e soluções) é **obrigatória**. O não cumprimento resultará em desclassificação.
10. As médias obtidas nas provas da segunda fase terão divulgação preliminar em 26/11/2025.
11. Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminar, comunique o fiscal e permaneça em seu lugar até receber autorização para sair.

MATEMÁTICA

Convenções: Considere o sistema de coordenadas cartesiano, a menos que haja indicação contrária.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$	: denota o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	: denota o conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$	: denota o conjunto dos números complexos.
$\overline{AB}$	: denota o segmento de reta de extremidades nos pontos A e B.
$m(\overline{AB})$	: denota o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Questão 01. Considere um octaedro regular, centrado na origem, com três vértices em $(5, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$ e $(0, 0, 5)$. Quantos pontos, no interior e na superfície desse sólido, possuem todas as coordenadas inteiras?

Questão 02. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que a entrada na primeira linha e na terceira coluna de A^n seja maior que 119.

Questão 03. As diagonais do paralelogramo $ABCD$ estão contidas nas retas $r: \ 2y - x = 2$ e $s: \ x + 2y = 8$. As retas r e s se encontram no ponto X. Sabendo que $C = (8, 5)$ e que a equação da circunferência inscrita no triângulo ABX é

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

determine a área de $ABCD$.

Questão 04. Um alvo é pintado em uma parede, composto de um círculo central e uma sequência de anéis concêntricos de cores alternadas entre vermelho e branco. O círculo central, pintado de vermelho, tem raio α unidades. Cada círculo subsequente tem raio uma unidade maior que o anterior: $\alpha+1$, depois $\alpha+2$ e assim por diante. Determine a área total em vermelho em função de α, sabendo que o alvo tem 33 círculos.

Questão 05. Quatro esferas idênticas, dispostas tangentes duas a duas, estão simultaneamente inscritas em uma única esfera maior, de modo que os centros das esferas menores formam um tetraedro regular. Calcule a razão entre o volume da esfera maior e a soma dos volumes das quatro esferas menores.

Questão 06. Dados os números reais $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots, \alpha_{n-1}$, defina as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, ambas de ordem $n \times n$, por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & se\ j \geq i, \\ \alpha_j^{i-j-1}, & se\ j < i \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ j \geq i, \\ 0, & se\ j < i \end{cases}$$

Suponha que a soma dos elementos da coluna j da matriz AB seja igual a $n - j$.

a) Determine o determinante de AB.

b) Determine o traço de AB em função de n.

c) Supondo que $n = 5$, determine todos os possíveis valores de $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4 \in \mathbb{R}$.

Questão 07. Seja $p(x)$ um polinômio de grau quatro com coeficientes reais. A soma das raízes de $p(x)$ é $\frac{3}{2}$, e o seu produto é $-\frac{5}{2}$. Determine todas as raízes de $p(x)$ em $\mathbb{C}$, sabendo que o resto da divisão de $p(x)$ por $x^3 - x + 4$ é igual a $9x^2 - 4x + 7$.

Questão 08. Quantas sequências estritamente crescentes de três números naturais é possível construir de forma que a soma dos três números é igual a 100?

Questão 09. Seja H a hipérbole com focos $A = (-6, 0)$, $B = (6, 0)$ e excentricidade 3.

a) Determine as equações de todas as retas que passam por $C = (0, -8)$ e são tangentes a H.

b) Para cada reta do item anterior, determine os pontos de tangência.

Questão 10. Os pontos A e B definem um segmento com $m(\overline{AB}) = 6(1+\sqrt{3})\ cm$. Os pontos C e D estão no segmento $\overline{AB}$. A circunferência de centro em C e passando por A e a circunferência de centro em D e passando por B se encontram nos pontos P e Q, que satisfazem

$$m(\overline{AP}) = m(\overline{PQ}), \qquad m(\overline{BP}) = m(\overline{AP})\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

a) Determine o raio de cada circunferência.

b) Determine a área da região comum ao interior das duas circunferências.

RASCUNHO