INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



VESTIBULAR 2026

2ª FASE

MATEMÁTICA

INSTRUÇÕES

- 1. Esta prova tem duração de quatro horas.
- 2. Não será permitido deixar o local de exame antes de duas horas decorridas do início da prova.
- 3. É permitido usar **apenas** caneta esferográfica de corpo transparente, lápis ou lapiseira, borracha, régua simples transparente e compasso. Qualquer outro material escolar é **proibido**.
- 4. Você recebeu este caderno de questões e um caderno de soluções.
- 5. Não é permitido destacar folhas de nenhum dos cadernos.
- 6. O caderno de questões contém 10 questões dissertativas numeradas de 01 a 10.
- 7. As **resoluções** devem ser apresentadas no **caderno de soluções**, exclusivamente nos espaços delimitados para cada questão. Somente as respostas registradas nesses espaços serão consideradas para correção. As páginas de rascunho não serão avaliadas.
- 8. Nas questões que envolvem cálculos, as expressões numéricas devem ser resolvidas **integralmente**, caso contrário haverá desconto na nota.
- 9. A devolução dos dois cadernos (questões e soluções) é **obrigatória**. O não cumprimento resultará em desclassificação.
- 10. As médias obtidas nas provas da segunda fase terão divulgação preliminar em 26/11/2025.
- 11. Aguarde o aviso para iniciar a prova. Ao terminar, comunique o fiscal e permaneça em seu lugar até receber autorização para sair.

MATEMÁTICA

Convenções: Considere o sistema de coordenadas cartesiano, a menos que haja indicação contrária.

 $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$: denota o conjunto dos números naturais. \mathbb{R} : denota o conjunto dos números reais.

 ${\Bbb C}$: denota o conjunto dos números complexos.

 \overline{AB} : denota o segmento de reta de extremidades nos pontos $A \in B$.

 $m(\overline{AB})$: denota o comprimento do segmento \overline{AB} .

Questão 01. Considere um octaedro regular, centrado na origem, com três vértices em (5,0,0), (0,5,0) e (0,0,5). Quantos pontos, no interior e na superfície desse sólido, possuem todas as coordenadas inteiras?

Questão 02. Considere

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Determine o menor $n \in \mathbb{N}$ tal que a entrada na primeira linha e na terceira coluna de A^n seja maior que 119.

Questão 03. As diagonais do paralelogramo ABCD estão contidas nas retas r: 2y-x=2 e s: x+2y=8. As retas r e s se encontram no ponto X. Sabendo que C=(8,5) e que a equação da circunferência inscrita no triângulo ABX é

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

determine a área de ABCD.

Questão 04. Um alvo é pintado em uma parede, composto de um círculo central e uma sequência de anéis concêntricos de cores alternadas entre vermelho e branco. O círculo central, pintado de vermelho, tem raio α unidades. Cada círculo subsequente tem raio uma unidade maior que o anterior: $\alpha+1$, depois $\alpha+2$ e assim por diante. Determine a área total em vermelho em função de α , sabendo que o alvo tem 33 círculos.

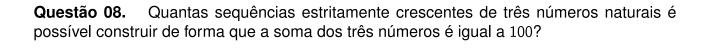
Questão 05. Quatro esferas idênticas, dispostas tangentes duas a duas, estão simultaneamente inscritas em uma única esfera maior, de modo que os centros das esferas menores formam um tetraedro regular. Calcule a razão entre o volume da esfera maior e a soma dos volumes das quatro esferas menores. **Questão 06.** Dados os números reais α_1 , α_2 , \cdots , α_{n-1} , defina as matrizes $A=(a_{ij})$ e $B=(b_{ij})$, ambas de ordem $n\times n$, por

$$a_{ij} = \left\{egin{array}{ll} 0, & se \ j \geq i, \ lpha_j^{i-j-1}, & se \ j < i \end{array}
ight. \ b_{ij} = \left\{egin{array}{ll} 1, & se \ j \geq i, \ 0, & se \ j < i \end{array}
ight.$$

Suponha que a soma dos elementos da coluna j da matriz AB seja igual a n-j.

- a) Determine o determinante de AB.
- **b)** Determine o traço de AB em função de n.
- **c)** Supondo que n=5, determine todos os possíveis valores de α_1 , α_2 , α_3 , $\alpha_4 \in \mathbb{R}$.

Questão 07. Seja p(x) um polinômio de grau quatro com coeficientes reais. A soma das raízes de p(x) é $\frac{3}{2}$, e o seu produto é $-\frac{5}{2}$. Determine todas as raízes de p(x) em \mathbb{C} , sabendo que o resto da divisão de p(x) por $x^3 - x + 4$ é igual a $9x^2 - 4x + 7$.



Questão 09. Seja H a hipérbole com focos A = (-6, 0), B = (6, 0) e excentricidade 3.

- a) Determine as equações de todas as retas que passam por C=(0,-8) e são tangentes a H.
- b) Para cada reta do item anterior, determine os pontos de tangência.

Questão 10. Os pontos A e B definem um segmento com $m(\overline{AB}) = 6(1 + \sqrt{3})$ cm. Os pontos C e D estão no segmento \overline{AB} . A circunferência de centro em C e passando por A e a circunferência de centro em D e passando por B se encontram nos pontos P e Q, que satisfazem

$$m(\overline{AP}) = m(\overline{PQ}), \quad m(\overline{BP}) = m(\overline{AP})\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

- a) Determine o raio de cada circunferência.
- b) Determine a área da região comum ao interior das duas circunferências.

RASCUNHO