## MATEMÁTICA

**Convenções:** Consideramos o sistema de coordenadas cartesiano a menos que haja indicação contrária.

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ | : denota o conjunto dos números naturais. |
| $\mathbb{R}$ | : denota o conjunto dos números reais. |
| $\mathbb{C}$ | : denota o conjunto dos números complexos. |
| $i$ | : denota a unidade imaginária, $i^2 = -1$. |
| $M_n(\mathbb{R})$ | : denota o conjunto das matrizes $n \times n$ de entradas reais. |
| $\overline{AB}$ | : denota o segmento de reta de extremidades nos pontos $A$ e $B$. |
| $A\hat{O}B$ | : denota o ângulo formado pelas semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, com vértice no ponto $O$. |
| $m(\overline{AB})$ | : denota o comprimento do segmento $\overline{AB}$. |

**Questão 1.** Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere um retângulo $R$ de lados medindo $a = 9x^2 - 5x^4$ e $b = 8x - 8x^3$. Sabendo que o perímetro de $R$ é 8 determine $a$ e $b$.

**Questão 2.** Seja $z \in \mathbb{C}$ e denote por $\Im(z)$ a parte imaginária de $z$. Determine todos os possíveis $z \in \mathbb{C}$ com $\Im(z) \neq 0$ tais que temos simultaneamente $\Im(z^3) = 0$ e $\Im((1+z)^3) = 0$.

**Questão 3.** Seja $A$ a matriz com 5 linhas e 10 colunas cujas entradas $a_{n,m}$ são dadas por

$$a_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 1 \\ n + a_{n,(m-1)}, & \text{se } m > 1 \end{cases}.$$

Determine a soma de todas as entradas de $A$.

**Questão 4.** No jogo da velha, dois jogadores competem em um tabuleiro ordenado formado por 3 linhas e 3 colunas. Os jogadores se alternam marcando uma casa ainda não ocupada até que um deles ocupe toda uma linha, coluna ou diagonal, sendo declarado o vencedor. Quantas configurações diferentes do tabuleiro correspondem à vitória do primeiro jogador na sua terceira jogada?

**Questão 5.** Considere $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ e $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. Determine todos os valores de $\arccos(x)$ dado que $x$ satisfaz

$$\arccos(x^4) + \operatorname{arcsen}(x^2 - 1/4) = \pi/2.$$

**Questão 6.** Seja $A = (0, 1)$. Considere a reta $r$ de equação $y = 1 - x/4$ e seja $s$ uma reta passando pela origem $O$ e que intersecta $r$ no $1^{\underline{o}}$ quadrante em um ponto $P$. Determine o ponto $Q$ do $2^{\underline{o}}$ quadrante que pertence a $r$ e dista $\sqrt{2}$ de $s$ sabendo que $A\hat{P}O = \theta$ e que $\tan(\theta) = \frac{5}{3}$.

**Questão 7.** Considere $T$ um tronco de pirâmide regular de altura $h = 4 + 2\sqrt{3}$ com bases hexagonais paralelas. Sabendo que o lado da maior base hexagonal mede $8\sqrt{3}/3$ e que o ângulo diedral entre as faces laterais e a base do tronco mede $75^o$, determine o volume de $T$.

**Questão 8.** Seja $Q$ um quadrilátero de vértices $A, B, C$ e $D$ cujos lados satisfazem $m(\overline{AB}) = 5 = m(\overline{CD})$, $m(\overline{BC}) = 3$ e $m(\overline{DA}) = 8$. Sabendo que $Q$ é inscrito em uma circunferência de raio $r$, determine $r$.

**Questão 9.** Sejam $P_1 = (0,6)$, $P_2 = (1,5)$ e $P_3 = (2,6)$ e sejam $C_1, C_2$ e $C_3$ circunferências centradas em $P_1, P_2$ e $P_3$, respectivamente. Sabendo que existe uma reta horizontal que é tangente a $C_1, C_2$ e $C_3$ determine $C_1 \cap C_2 \cap C_3$ quando este não for vazio.

**Questão 10.** Considere um octaedro regular de aresta de comprimento $l_1$. Inscreva nesse octaedro um cubo cujos vértices estão nos baricentros das faces do octaedro. Dentro desse cubo inscreva um novo octaedro regular de aresta de comprimento $l_2$ cujos vértices estão nos centros das faces do cubo. Continue com esse processo obtendo uma sequência $l_i$ para $i \in \mathbb{N}$. Determine então o valor da razão $l_{10}/l_1$.