MATEMÁTICA

Notações

$\mathbb{N}$ $= \{1, 2, 3, \cdots\}$: o conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$: o conjunto dos números reais.
$\mathbb{C}$: o conjunto dos números complexos.
i : unidade imaginária, $i^2 = -1$.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Determine o raio da circunferência circunscrita a um trapézio isóceles cujas bases e altura têm comprimentos $4, 2$ e 3, respectivamente.

Questão 2. Determine todos os valores do número real a para os quais a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a^3 & -a & 3 & 2 \\ 2 & a^2 & 1 & a^3 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & -a^2 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 3 \\ a^2 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

é não singular.

Questão 3. O primeiro termo de uma progressão geométrica de números reais é 1 e a soma de seus primeiros 79 termos é igual ao produto de seus primeiros 13 termos. Determine:

(a) a soma dos 40 primeiros termos;
(b) o produto dos 7 primeiros termos.

Questão 4. Determine todos os pontos (x, y) que pertencem à circunferência de centro $(5, 0)$ e raio 5, que satisfazem a equação:

$$\sqrt{3x - y - 4} = \sqrt{x^2 - 7x - 5y - 4}.$$

Questão 5. Determine as raízes comuns aos polinômios:

$$p(x) = x^5 + x^4 - 8x^2 - 9x + 15 \quad \text{e} \quad q(x) = 3x^4 + 6x^3 + 13x^2 - 4x - 10.$$

Questão 6. Considere $z = a\left(\sqrt{3} + i\right) \in \mathbb{C}$, onde $a \in \mathbb{R}$. Determine todos os números reais a para os quais z^7 e z^{13} estão à mesma distância de z no plano complexo.

Questão 7. Um relógio digital mostra o horário no formato $H : M : S$, onde H é um inteiro entre 1 e 12 representando as horas, M é um inteiro representando os minutos e S é um inteiro representando os segundos, ambos entre 0 e 59. Quantas vezes em um dia (H, M, S) são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética de razão estritamente positiva?

Questão 8. Seja P uma pirâmide regular com base quadrada. Suponha que os centros das esferas inscrita e circunscrita a P coincidam. Determine a razão entre as áreas das esferas circunscrita e inscrita a P.

Questão 9. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha + \beta + \gamma = -3\pi$, $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{2}$ e $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -\frac{1}{2}$. Determine o valor de $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$.

Questão 10. Uma moeda é lançada sucessivas vezes até que se tenha a ocorrência de 2 caras. Qual a probabilidade do número total de lançamentos ser par?