

## MATEMÁTICA

### Notações

$\mathbb{R}$  : conjunto dos números reais

$i$  : unidade imaginária  $i^2 = -1$

$[a, b]$  =  $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

---

**Questão 1.** Determine os valores reais de  $a$  e  $b$  para os quais as equações  $x^3 + ax^2 + 18 = 0$  e  $x^3 + bx + 12 = 0$  possuam duas raízes em comum e, a seguir, determine essas raízes.

**Questão 2.** Determine todas as soluções da equação  $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$ .

**Questão 3.** Determine o número complexo  $z$  de menor argumento que satisfaz  $|z - 25i| \leq 15$ .

**Questão 4.** Sabendo que  $x$  pertence ao intervalo fechado  $[1, 64]$ , determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2 \left(\frac{8}{x}\right).$$

**Questão 5.** Seja  $F$  o foco da parábola de equação  $(y - 5)^2 = 4(x - 7)$ , e sejam  $A$  e  $B$  os focos da elipse de equação  $\frac{(x - 4)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{8} = 1$ . Determine o lugar geométrico formado pelos pontos  $P$  do plano tais que a área do triângulo  $ABP$  seja numericamente igual ao dobro da distância de  $P$  a  $F$ .

**Questão 6.** Sejam  $a, b$  e  $c$  três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \quad \text{e} \quad \sin a + \sin b + \sin c = 0.$$

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

**Questão 7.** Um número natural  $n$ , escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine  $n$ .

**Questão 8.** Um cone circular reto, de altura  $h$ , e um cilindro circular reto têm bases de mesmo raio. O volume do cone é metade do volume do cilindro, e a área lateral do cone é igual à área lateral do cilindro. Determine, em função de  $h$ , o raio da esfera inscrita no cone.

**Questão 9.** Sejam  $A, B, C$  os vértices de um triângulo. Determine  $\sin \hat{B}$ , sabendo que

$$\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{4}{5} = \sin(\hat{A} - \hat{C}).$$

**Questão 10.** Escolhem-se aleatoriamente três números distintos no conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$ . Determine a probabilidade da soma desses três números ser divisível por 3.