NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^+$: conjunto dos números reais não-negativos

i : unidade imaginária; $i^2 = -1$

$\arg z$: argumento do número complexo z

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

A^C : complementar do conjunto A

$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,\ n \in \mathbb{N}$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 1. Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

A ( ) 6. B ( ) 8. C ( ) 10. D ( ) 12. E ( ) 14.

Questão 2. Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

A ( ) $\frac{2}{9}$. B ( ) $\frac{1}{3}$. C ( ) $\frac{4}{9}$. D ( ) $\frac{5}{9}$. E ( ) $\frac{2}{3}$.

Questão 3. Sejam $z = n^2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$ e $w = n(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^n$ é real. Então, $\frac{z}{w}$ é igual a

A ( ) $\sqrt{3} + i$. B ( ) $2(\sqrt{3} + i)$. C ( ) $2(\sqrt{2} + i)$.

D ( ) $2(\sqrt{2} - i)$. E ( ) $2(\sqrt{3} - i)$.

Questão 4. Se $\arg z = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é

A ( ) $-\frac{\pi}{2}$. B ( ) $\frac{\pi}{4}$. C ( ) $\frac{\pi}{2}$. D ( ) $\frac{3\pi}{4}$. E ( ) $\frac{7\pi}{4}$.

Questão 5. Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

$I \cdot$ Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;

$II \cdot$ Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;

$III \cdot$ Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,

é (são) sempre verdadeira(s)

A ( ) apenas I. B ( ) apenas II. C ( ) apenas III.

D ( ) apenas I e II. E ( ) I, II e III.

Questão 6. As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio $p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \quad \text{e} \quad x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

Então, o coeficiente a é igual a

A ( ) $2(1 - \sqrt{2})$. B ( ) $\sqrt{2} - 4$. C ( ) $2(2 + \sqrt{2})$.

D ( ) $4 + \sqrt{2}$. E ( ) $4(\sqrt{2} - 1)$.

Questão 7. Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

A ( ) -60. B ( ) -30. C ( ) 0. D ( ) 30. E ( ) 60.

Questão 8. Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

A ( ) $5(5 - 2\sqrt{3})$. B ( ) $15(5 - 2\sqrt{3})$. C ( ) $30(5 - 2\sqrt{3})$.

D ( ) $45(5 - 2\sqrt{3})$. E ( ) $50(5 - 2\sqrt{3})$.

Questão 9. Um triângulo ABC tem lados com medidas $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm, $b = 1$ cm e $c = \dfrac{1}{2}$ cm. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

A ( ) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$. B ( ) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. C ( ) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$.

D ( ) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. E ( ) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$.

Questão 10. Sejam $A = (0, 0)$, $B = (0, 6)$ e $C = (4, 3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a

A ( ) $\frac{5}{3}$. B ( ) $\frac{\sqrt{97}}{3}$. C ( ) $\frac{\sqrt{109}}{3}$. D ( ) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. E ( ) $\frac{10}{3}$.

Questão 11. A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r : x - 3y + 3 = 0$ e $s : 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a

A ( ) $\frac{19}{2}$. B ( ) 10. C ( ) $\frac{25}{2}$. D ( ) $\frac{27}{2}$. E ( ) $\frac{29}{2}$.

Questão 12. Dados os pontos $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ e $C = (1, 1)$, o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d = 2$ da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por

A ( ) $r_{1,2} : \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0$.

B ( ) $r_{1,2} : \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$.

C ( ) $r_{1,2} : 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$.

D ( ) $r_{1,2} : (\sqrt{2} + 1)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0$.

E ( ) $r_{1,2} : (\sqrt{2} + 1)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0$.

Questão 13. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

$I \cdot$ $(A \setminus B^C) \setminus C^C = A \cap (B \cup C)$;

$II \cdot$ $(A \setminus B^C) \setminus C = A \cup (B \cap C^C)^C$;

$III \cdot$ $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

A ( ) I. B ( ) II. C ( ) III.

D ( ) I e III. E ( ) II e III.

Questão 14. Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não-vazios, tais que $n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B))$. Então, a diferença $n(A) - n(B)$ pode assumir

A ( ) um único valor.

B ( ) apenas dois valores distintos.

C ( ) apenas três valores distintos.

D ( ) apenas quatro valores distintos.

E ( ) mais do que quatro valores distintos.

Questão 15. Considere um número real $a \neq 1$ positivo, fixado, e a equação em x

$$a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0, \ \beta \in \mathbb{R}$$

Das afirmações:

$I\cdot$ Se $\beta < 0$, então existem duas soluções reais distintas;

$II\cdot$ Se $\beta = -1$, então existe apenas uma solução real;

$III\cdot$ Se $\beta = 0$, então não existem soluções reais;

$IV\cdot$ Se $\beta > 0$, então existem duas soluções reais distintas,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

A ( ) I.
B ( ) I e III
C ( ) II e III.
D ( ) II e IV.
E ( ) I, III e IV.

Questão 16. Seja $S = \left\{x \in \mathbb{R} | \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{e^{-x} - e^x}{2}\right) + \arccos\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right\}$. Então,

A ( ) $S = \emptyset$.
B ( ) $S = \{0\}$.
C ( ) $S = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
D ( ) $S = \mathbb{R}^+$.
E ( ) $S = \mathbb{R}$.

Questão 17. Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \dfrac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $\operatorname{tg}(x)$ são, respectivamente

A ( ) 1 e 0.
B ( ) 1 e $\dfrac{5}{2}$.
C ( ) -1 e 0.
D ( ) 1 e 5.
E ( ) -1 e $-\dfrac{5}{2}$.

Questão 18. A soma $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

A ( ) $-\cos(\alpha)$ quando n é par.
B ( ) $-\operatorname{sen}(\alpha)$ quando n é ímpar.
C ( ) $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar.
D ( ) $\operatorname{sen}(\alpha)$ quando n é par.
E ( ) zero quando n é ímpar.

Questão 19. Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\dfrac{\pi}{243}\right)^{1/3}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

A ( ) $\dfrac{1}{4}$.
B ( ) $\dfrac{1}{3}$.
C ( ) $\dfrac{1}{2}$.
D ( ) $\dfrac{2}{3}$.
E ( ) $\dfrac{3}{4}$.

Questão 20. A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de $120°$ e área igual a $3\pi\ cm^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

A ( ) 4π e $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.
B ( ) 4π e $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$.
C ( ) 4π e $\pi\sqrt{2}$.
D ( ) 3π e $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.
E ( ) π e $2\pi\sqrt{2}$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E REPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

Questão 22. Determine os valores reais de x de modo que $\operatorname{sen}(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Questão 23. Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são 1, $1 + x_1$, $1+x_2, \ldots, 1+x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\dfrac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

Questão 24. Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \dfrac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \dfrac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

Questão 25. Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio 2 cm e um ponto P que dista $2\sqrt{2}\ cm$ do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor $\overset{\frown}{AB}$ em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

Questão 26. As interseções das retas $r : x - 3y + 3 = 0$, $s : x + 2y - 7 = 0$ e $t : x + 7y - 7 = 0$, duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimento. Determine:

a) A área total da superfície do prisma.

b) O volume do prisma.

Questão 27. Dos n alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

Questão 28. Analise se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Questão 29. Determine os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que $\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \geq 0$.

Questão 30. As retas r_1 e r_2 são concorrentes no ponto P, exterior a um círculo ω. A reta r_1 tangencia ω no ponto A e a reta r_2 intercepta ω nos pontos B e C diametralmente opostos. A medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ é $60°$ e $\overline{PA}$ mede $\sqrt{2}\ cm$. Determine a área do setor menor de ω definido pelo arco $\overset{\frown}{AB}$.