## NOTAÇÕES

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ : | conjunto dos números naturais | $\mathbb{C}$ : | conjunto dos números complexos |
| $\mathbb{Z}$ : | conjunto dos números inteiros | $i$ : | unidade imaginária: $i^2 = -1$ |
| $\mathbb{Q}$ : | conjunto dos números racionais | $\overline{z}$ : | conjugado do número $z \in \mathbb{C}$ |
| $\mathbb{R}$ : | conjunto dos números reais | $\lvert z\rvert$ : | módulo do número $z \in \mathbb{C}$ |

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$ $\qquad$ $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$

$[a,b[ \ = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$ $\qquad$ $]a,b[ \ = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$

$\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ : conjunto das matrizes reais $m \times n$

$\det M$: determinante da matriz $M$

$P(A)$ : conjunto de todos os subconjuntos do conjunto $A$

$n(A)$ : número de elementos do conjunto finito $A$

$\overline{AB}$ : segmento de reta unindo os pontos $A$ e $B$

$A\hat{B}C$ : ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto $B$

$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k, \ k \in \mathbb{N}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

---

**Questão 01**. Dado $z = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

A ( ) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}\,i$. $\qquad$ B ( ) $-1$. $\qquad$ C ( ) 0.

D ( ) 1. $\qquad$ E ( ) $\frac{89}{6}\sqrt{3}\,i$.

**Questão 02**. Das afirmações abaixo sobre números complexos $z_1$ e $z_2$ :

$I -$ $\ |z_1 - z_2| \leq \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|$.

$II -$ $\ |\overline{z}_1 . z_2| = \big|\,|\overline{z}_2| . |\overline{z}_2|\,\big|$.

$III -$ Se $z_1 = |z_1|\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \neq 0$, então $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}\,(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

é(são) sempre verdadeira(s)

A ( ) apenas $I$. $\qquad$ B ( ) apenas $II$. $\qquad$ C ( ) apenas $III$.

D ( ) apenas $II$ e $III$. $\qquad$ E ( ) todas.

**Questão 03**. A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}$ : $z^2 + |z|^2 + i\,z - 1 = 0$ é igual a

A ( ) 2. $\qquad$ B ( ) $\frac{i}{2}$. $\qquad$ C ( ) 0. $\qquad$ D ( ) $-\frac{1}{2}$. $\qquad$ E ( ) $-2\,i$.

**Questão 04**. Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

A ( ) $\frac{7}{8}$. B ( ) $\frac{5}{7}$. C ( ) $\frac{5}{8}$. D ( ) $\frac{3}{5}$. E ( ) $\frac{3}{7}$.

**Questão 05**. Sejam $A$ e $B$ conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C : C \subset B \setminus A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

$I -$ $n(B) - n(A)$ é único;
$II -$ $n(B) + n(A) \leq 128$;
$III -$ a dupla ordenada $(n(A), n(B))$ é única;

é(são) verdadeira(s)

A ( ) apenas $I$. B ( ) apenas $II$. C ( ) apenas $III$.
D ( ) apenas $I$ e $II$. E ( ) nenhuma.

**Questão 06**. O sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5c\,z = 0 \end{cases}$

A ( ) é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
B ( ) é possível quando $a = \frac{7\,b}{3}$ ou $c \neq 1$.
C ( ) é impossível quando $c = 1$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
D ( ) é impossível quando $a \neq \frac{7\,b}{3}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.
E ( ) é possível quando $c = 1$ e $a \neq \frac{7\,b}{3}$.

**Questão 07**. Considere as afirmações abaixo:

$I -$ Se $M$ é uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula $N$, de mesma ordem, tal que $MN$ é matriz nula.

$II -$ Se $M$ é uma matriz quadrada inversível de ordem $n$ tal que $\det(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não-nula $X$, de ordem $n \times 1$, tal que $MX = X$.

$III -$ A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \frac{tg\,\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\,\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Destas, é(são) verdadeira(s)

A ( ) apenas $II$. B ( ) apenas $I$ e $II$. C ( ) apenas $I$ e $III$.
D ( ) apenas $II$ e $III$. E ( ) todas.

**Questão 08.** Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a

A ( ) $-64$. B ( ) $-36$. C ( ) $-28$. D ( ) 18. E ( ) 27.

**Questão 09**. O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a

A ( ) $-5$. B ( ) $-1$. C ( ) 1. D ( ) 2. E ( ) 5.

**Questão 10**. Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3}(x - a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que $x = 0$ é uma das raízes e que $(a_1, a_2, a_3)$ é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que

A ( ) a soma de todas as raízes é 5.
B ( ) o produto de todas as raízes é 21.
C ( ) a única raiz real é maior que zero.
D ( ) a soma das raízes não reais é 10.
E ( ) todas as raízes são reais.

**Questão 11**. A expressão $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0$, com $x$ e $y$ reais, representa

A ( ) o conjunto vazio.
B ( ) um conjunto unitário.
C ( ) um conjunto não-unitário com um número finito de pontos.
D ( ) um conjunto com um número infinito de pontos.
E ( ) o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2(e^x - 2)^2 + 3(e^y - 3)^2 = 1\}$.

**Questão 12**. Com respeito à equação polinomial $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ é correto afirmar que

A ( ) todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.
B ( ) uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.
C ( ) duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não-nula.
D ( ) não é divisível por $2x - 1$.
E ( ) uma única raiz está em $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

**Questão 13**. Sejam $m$ e $n$ inteiros tais que $\frac{m}{n} = -\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2 + 36y^2 + mx + ny - 23 = 0$ representa uma circunferência de raio $r = 1\ cm$ e centro $C$ localizado no segundo quadrante. Se $A$ e $B$ são os pontos onde a circunferência cruza o eixo $Oy$, a área do triângulo $ABC$, em $cm^2$, é igual a

A ( ) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. B ( ) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. C ( ) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D ( ) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. E ( ) $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

**Questão 14**. Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em *radianos*, é igual a

A ( ) $\frac{23}{11}\pi$. B ( ) $\frac{13}{6}\pi$. C ( ) $\frac{24}{11}\pi$. D ( ) $\frac{25}{11}\pi$. E ( ) $\frac{7}{3}\pi$.

**Questão 15**. Seja $ABC$ um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem $8\,cm$ e $6\,cm$, respectivamente. Se $D$ é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo $ADC$ é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em $cm$, é igual a

A ( ) $\frac{3}{4}$. B ( ) $\frac{15}{6}$. C ( ) $\frac{15}{4}$. D ( ) $\frac{25}{4}$. E ( ) $\frac{25}{2}$.

**Questão 16**. Sejam $ABCD$ um quadrado e $E$ um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado $ABCD$, do trapézio $BEDC$ e do triângulo $ADE$. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 $cm^2$, a medida do segmento $\overline{AE}$, em $cm$, é igual a

A ( ) $\frac{10}{3}$. B ( ) 5. C ( ) $\frac{20}{3}$. D ( ) $\frac{25}{3}$. E ( ) 10.

**Questão 17**. Num triângulo $ABC$ o lado $\overline{AB}$ mede 2 $cm$, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 1 $cm$, o ângulo $A\hat{B}C$ mede $135^0$ e $M$ é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então a medida de $B\hat{A}C + B\hat{M}C$, em *radianos*, é igual a

A ( ) $\frac{1}{5}\pi$. B ( ) $\frac{1}{4}\pi$. C ( ) $\frac{1}{3}\pi$. D ( ) $\frac{3}{8}\pi$. E ( ) $\frac{2}{5}\pi$.

**Questão 18**. Um triângulo $ABC$ está inscrito numa circunferência de raio 5 $cm$. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 $cm$ e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto $D$. Se $\alpha$ é a soma das áreas dos triângulos $ABC$ e $ABD$ e $\beta$ é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em $cm^2$, é igual a

A ( ) 14. B ( ) 15. C ( ) 16. D ( ) 17. E ( ) 18.

**Questão 19**. Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 $cm$ e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}\,cm$. Então o raio da esfera, em $cm$, é igual a

A ( ) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$. B ( ) $\frac{13}{3}$. C ( ) $\frac{15}{4}$. D ( ) $2\sqrt{3}$. E ( ) $\frac{10}{3}$.

**Questão 20**. Considere as afirmações:

$I -$ Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida $a = 120^0$.

$II -$ Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, $30^0$, $45^0$, $50^0$, $50^0$ e $170^0$.

$III -$ Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

$IV -$ A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é $2880^0$.

Destas, é(são) correta(s) apenas

A ( ) $II$. B ( ) $IV$. C ( ) $II$ e $IV$.
D ( ) $I$, $II$ e $IV$. E ( ) $II$, $III$ e $IV$.

---

## AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E REPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

**Questão 21**. Analise a existência de conjuntos $A$ e $B$, ambos não-vazios, tais que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$.

**Questão 22**. Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $z_1, z_2, ..., z_n$ as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$, $i, j = 1, 2, ..., n$, com $i \neq j$, distintos entre si.

**Questão 23**. Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

**Questão 24**. Resolva a inequação em $\mathbb{R}$: $16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{log_{\frac{1}{5}}(x^2 - x + 19)}$.

**Questão 25**. Determine todas as matrizes $M \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM$, $\forall N \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

**Questão 26**. Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2-m)\,x^2 + 2m\,x + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

**Questão 27**. Considere uma esfera $\Omega$ com centro em $C$ e raio $r = 6\,cm$ e um plano $\Sigma$ que dista $2\,cm$ de $C$. Determine a área da intersecção do plano $\Sigma$ com uma cunha esférica de $30°$ em $\Omega$ que tenha aresta ortogonal a $\Sigma$.

**Questão 28**.

**a)** Calcule $\left(cos^2\frac{\pi}{5} - sen^2\frac{\pi}{5}\right) cos\frac{\pi}{10} - 2\,sen\frac{\pi}{5}\,cos\frac{\pi}{5}\,sen\frac{\pi}{10}$.

**b)** Usando o resultado do item anterior, calcule $sen\frac{\pi}{10}\,cos\frac{\pi}{5}$.

**Questão 29**. Num triângulo $AOB$ o ângulo $A\hat{O}B$ mede $135^0$ e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ medem $\sqrt{2}\ cm$ e $\sqrt{2-\sqrt{3}}\ cm$, respectivamente. A circunferência de centro em $O$ e raio igual à medida de $\overline{OB}$ intercepta $\overline{AB}$ no ponto $C\ (\neq B)$.

**a)** Mostre que $O\hat{A}B$ mede $15^0$.

**b)** Calcule o comprimento de $\overline{AC}$.

**Questão 30**. Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}\ cm$. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio $r$. O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

**a)** Determine o valor de $r$.

**b)** Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.

**c)** Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.