

MATEMÁTICA

Notações

\mathbb{R} : conjunto dos números reais

i : unidade imaginária $i^2 = -1$

$[a, b]$ = $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 1. Determine os valores reais de a e b para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ possuam duas raízes em comum e, a seguir, determine essas raízes.

Questão 2. Determine todas as soluções da equação $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$.

Questão 3. Determine o número complexo z de menor argumento que satisfaz $|z - 25i| \leq 15$.

Questão 4. Sabendo que x pertence ao intervalo fechado $[1, 64]$, determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2 \left(\frac{8}{x}\right).$$

Questão 5. Seja F o foco da parábola de equação $(y - 5)^2 = 4(x - 7)$, e sejam A e B os focos da elipse de equação $\frac{(x - 4)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{8} = 1$. Determine o lugar geométrico formado pelos pontos P do plano tais que a área do triângulo ABP seja numericamente igual ao dobro da distância de P a F .

Questão 6. Sejam a, b e c três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \quad \text{e} \quad \sin a + \sin b + \sin c = 0.$$

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

Questão 7. Um número natural n , escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n .

Questão 8. Um cone circular reto, de altura h , e um cilindro circular reto têm bases de mesmo raio. O volume do cone é metade do volume do cilindro, e a área lateral do cone é igual à área lateral do cilindro. Determine, em função de h , o raio da esfera inscrita no cone.

Questão 9. Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Determine $\sin \hat{B}$, sabendo que

$$\sin(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{4}{5} = \sin(\hat{A} - \hat{C}).$$

Questão 10. Escolhem-se aleatoriamente três números distintos no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$. Determine a probabilidade da soma desses três números ser divisível por 3.