

Questão 3. Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7920, então $a + b$ é

- A () 2. B () 3. C () 4. D () 5. E () 6.

Questão 4. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} \circ g^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por

- A () $b + ad = d + bc$. B () $d + ba = c + db$. C () $a + db = b + cd$.
D () $b + ac = d + ba$. E () $c + da = b + cd$.

Questão 5. Sejam x_1, \dots, x_5 e y_1, \dots, y_5 números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz 5×5 definida por $a_{ij} = x_i + y_j$, $1 \leq i, j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A , então o maior valor possível de r é

- A () 1. B () 2. C () 3. D () 4. E () 5.

Questão 6. Sobre duas retas paralelas r e s são tomados 13 pontos, m pontos em r e n pontos em s , sendo $m > n$. Com os pontos são formados todos os triângulos e quadriláteros convexos possíveis. Sabe-se que o quociente entre o número de quadriláteros e o número de triângulos é $15/11$. Então, os valores de n e m são, respectivamente,

- A () 2 e 11. B () 3 e 10. C () 4 e 9. D () 5 e 8. E () 6 e 7.

Questão 7. Considere a definição: duas circunferências são *ortogonais* quando se interceptam em dois pontos distintos e nesses pontos suas tangentes são perpendiculares. Com relação às circunferências $C_1 : x^2 + (y + 4)^2 = 7$, $C_2 : x^2 + y^2 = 9$ e $C_3 : (x - 5)^2 + y^2 = 16$, podemos afirmar que

- A () somente C_1 e C_2 são ortogonais.
B () somente C_1 e C_3 são ortogonais.
C () C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3 .
D () C_1, C_2 e C_3 são ortogonais duas a duas.
E () não há ortogonalidade entre as circunferências.

Questão 8. As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

- A () $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. B () $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$. C () $\sqrt{2}$.
D () $\frac{3\sqrt{2} + 1}{2}$. E () $3\sqrt{2}$.

Questão 14. Se o sistema
$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ 2a^2y + (2a^4 - a)z & = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)z & = 0 \end{cases}$$
 admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

A () $0, -1, \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$.

B () $0, -1, \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

C () $0, -1, \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

D () $0, -1, -1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}$.

E () $0, -1, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$.

Questão 15. Considere a matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R}.$$
 Se o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x) = \det A$, então o produto das raízes de $p(x)$ é

A () $\frac{1}{2}$.

B () $\frac{1}{3}$.

C () $\frac{1}{5}$.

D () $\frac{1}{7}$.

E () $\frac{1}{11}$.

Questão 16. Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3 :

A () 10.

B () 12.

C () 15.

D () 20.

E () 30.

Questão 17. Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum \overline{AB} . Seja M o ponto médio de \overline{AB} e N o ponto médio de \overline{CD} . Se $MN = CN = 2$ cm, então a altura relativa ao lado \overline{CD} do triângulo ACD mede, em cm,

A () $\frac{\sqrt{60}}{3}$.

B () $\frac{\sqrt{50}}{3}$.

C () $\frac{\sqrt{40}}{3}$.

D () $\frac{\sqrt{30}}{3}$.

E () $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Questão 18. Uma progressão aritmética (a_1, a_2, \dots, a_n) satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante

da matriz
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$
 é

A () -96.

B () -85.

C () 63.

D () 99.

E () 115.

Questão 19. São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P_1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P_2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então $P_1 + P_2$ vale

- A () $\frac{8}{15}$. B () $\frac{7}{15}$. C () $\frac{6}{15}$. D () 1. E () $\frac{17}{15}$.

Questão 20. Para que o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = c^2 \end{cases}$ admita apenas soluções reais, todos os valores reais de c pertencem ao conjunto

- A () $\left] -\infty, -\frac{1}{4} \right[$. B () $\left] -\infty, -\frac{1}{4} \right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty \right[$. C () $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right]$.
D () $\left[\frac{1}{2}, \infty \right[$. E () $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty \right[$.

AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.

Questão 21. Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão -5 . Determine o número de vértices do poliedro.

Questão 22. Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial: $3^{x-2} + \sum_{k=1}^4 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$.

Questão 23. No plano cartesiano são dadas as circunferências $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ e $C_2 : (x-4)^2 + y^2 = 4$. Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2 , passando pelo ponto $A = (3, \sqrt{3})$.

Questão 24. Seja $z = \cos \frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$. Pedem-se:

a) Use a propriedade $z^k = \cos \frac{k\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{k\pi}{7}$, $k \in \mathbb{N}$, para expressar $\cos \frac{\pi}{7}$, $\cos \frac{3\pi}{7}$ e $\cos \frac{5\pi}{7}$ em função de z .

b) Determine inteiros a e b tais que $\frac{a}{b} = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$.

Questão 25. Uma reta r separa um plano π em dois semiplanos π_1 e π_2 . Considere pontos A e B tais que $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$ de modo que $d(A, r) = 3$, $d(B, r) = 6$ e $d(A, B) = 15$. Uma circunferência contida em π passa pelos pontos A e B e encontra r nos pontos M e N . Determine a menor distância possível entre os pontos M e N .

Questão 26. De uma caixa que contém 10 bolas brancas e 6 bolas pretas, são selecionadas ao acaso k bolas.

a) Qual a probabilidade de que exatamente r bolas sejam brancas, nas condições $0 \leq k - r \leq 6$ e $0 \leq k \leq 10$.

b) Use o item (a) para calcular a soma

$$\sum_{r=0}^6 \binom{10}{r} \binom{6}{6-r}.$$

Questão 27. Quantos pares de números inteiros positivos (A, B) existem cujo mínimo múltiplo comum é 126×10^3 ? Para efeito de contagem, considerar $(A, B) \equiv (B, A)$.

Questão 28. A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\frac{25\pi}{2}$ cm². Dois planos, π_1 e π_2 , paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

Questão 29. Seja $p(x)$ um polinômio não nulo. Se $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de $p(x)$, determine o menor grau possível de $p(x)$.

Questão 30. No plano cartesiano são dados o ponto $P = (0, 3)$ e o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (3, 2)$. Determine um ponto N sobre o eixo dos x de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.