

## NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$	: conjunto dos números naturais; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	: conjunto dos números complexos
$i$	: unidade imaginária: $i^2 = -1$
$ z $	: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\bar{z}$	: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$\text{Re}(z)$	: parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$\det A$	: determinante da matriz $A$
$A^t$	: transposta da matriz $A$
$\mathcal{P}(A)$	: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto $A$
$n(A)$	: número de elementos do conjunto finito $A$
$P(A)$	: probabilidade de ocorrência do evento $A$
$f \circ g$	: função composta das funções $f$ e $g$
$[a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
$[a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
$]a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$
$]a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
$A \setminus B$	$= \{x; x \in A \text{ e } x \notin B\}$
$\sum_{n=1}^k a_n$	$= a_1 + a_2 + \dots + a_k, k \in \mathbb{N}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

---

**Questão 1.** Das afirmações:

I. Se  $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , com  $y \neq -x$ , então  $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

II. Se  $x \in \mathbb{Q}$  e  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , então  $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ;

III. Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , com  $a < b < c$ . Se  $f: [a, c] \rightarrow [a, b]$  é sobrejetora, então  $f$  não é injetora,

é (são) verdadeira(s)

A ( ) apenas I e II.

B ( ) apenas I e III.

C ( ) apenas II e III.

D ( ) apenas III.

E ( ) nenhuma.



**Questão 8.** Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas  $A$  e  $B$  de ordem  $n$ , com  $A$  inversível e  $B$  antissimétrica:

- I. Se o produto  $AB$  for inversível, então  $n$  é par;
- II. Se o produto  $AB$  não for inversível, então  $n$  é ímpar;
- III. Se  $B$  for inversível, então  $n$  é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

- A ( ) apenas I.
- B ( ) apenas I e II.
- C ( ) apenas I e III.
- D ( ) apenas II e III.
- E ( ) todas.

**Questão 9.** Sejam  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$  matrizes reais tais que o produto  $AB$  é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

- I.  $BA$  é antissimétrica;
- II.  $BA$  não é inversível ;
- III. O sistema  $(BA)X = 0$ , com  $X^t = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ , admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

- A ( ) apenas I e II.
- B ( ) apenas II e III.
- C ( ) apenas I.
- D ( ) apenas II.
- E ( ) apenas III.

**Questão 10.** Seja  $M$  uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9} \det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de  $M$  é

- A ( )  $\frac{1}{3}$ .
- B ( )  $\frac{1}{2}$ .
- C ( )  $\frac{2}{3}$ .
- D ( )  $\frac{4}{5}$ .
- E ( )  $\frac{5}{4}$ .

**Questão 11.** Considere a equação  $A(t)X = B(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , em que  $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  e  $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ . Sabendo que  $\det A(t) = 1$  e  $t \neq 0$ , os valores de  $x$ ,  $y$  e  $z$  são, respectivamente,

- A ( )  $2\sqrt{2}$ ,  $0$ ,  $-3\sqrt{2}$ .
- B ( )  $-2\sqrt{2}$ ,  $0$ ,  $-3\sqrt{2}$ .
- C ( )  $0$ ,  $3\sqrt{2}$ ,  $2\sqrt{2}$ .
- D ( )  $0$ ,  $2\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{3}$ .
- E ( )  $2\sqrt{3}$ ,  $-\sqrt{3}$ ,  $0$ .



**Questão 18.** Uma pirâmide de altura  $h = 1 \text{ cm}$  e volume  $V = 50 \text{ cm}^3$  tem como base um polígono convexo de  $n$  lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se  $n - 3$  diagonais que o decompõem em  $n - 2$  triângulos cujas áreas  $S_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ , constituem uma progressão aritmética na qual  $S_3 = \frac{3}{2} \text{ cm}^2$  e  $S_6 = 3 \text{ cm}^2$ . Então  $n$  é igual a

- A ( ) 22.                      B ( ) 24.                      C ( ) 26.                      D ( ) 28.                      E ( ) 32.

**Questão 19.** A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a  $4\pi$  (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas  $r : 2x - 2y + 5 = 0$  e  $s : x + y - 4 = 0$  é

- A ( )  $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - \frac{10}{4})^2 = 4$ .  
 B ( )  $(x - \frac{3}{4})^2 + (y - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 = 4$ .  
 C ( )  $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{10}{4})^2 = 4$ .  
 D ( )  $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{13}{4})^2 = 4$ .  
 E ( )  $(x - (2\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 + (y - \frac{11}{4})^2 = 4$ .

**Questão 20.** Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles  $ABC$  em torno de uma reta paralela à base  $\overline{BC}$  que dista  $0,25 \text{ cm}$  do vértice  $A$  e  $0,75 \text{ cm}$  da base  $\overline{BC}$ . Se o lado  $\overline{AB}$  mede  $\frac{\sqrt{\pi^2 + 1}}{2\pi} \text{ cm}$ , o volume desse sólido, em  $\text{cm}^3$ , é igual a

- A ( )  $\frac{9}{16}$ .                      B ( )  $\frac{13}{96}$ .                      C ( )  $\frac{7}{24}$ .                      D ( )  $\frac{9}{24}$ .                      E ( )  $\frac{11}{96}$ .

**AS QUESTÕES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30, DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇÕES.**

**Questão 21.** Considere as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{\alpha x}$ , em que  $\alpha$  é uma constante real positiva, e  $g : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ . Determine o conjunto-solução da inequação  $(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x)$ .

**Questão 22.** Determine as soluções reais da equação em  $x$ ,  $(\log_4 x)^3 - \log_4(x^4) - 3 \frac{\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0$ .

**Questão 23.**

- a) Determine o valor máximo de  $|z + i|$ , sabendo que  $|z - 2| = 1$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .  
 b) Se  $z_o \in \mathbb{C}$  satisfaz (a), determine  $z_o$ .

**Questão 24.** Seja  $\Omega$  o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se  $A \subset \Omega$  é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a 9 e  $B \subset \Omega$  o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:

- a)  $n(\Omega)$ ;  
 b)  $n(A)$  e  $n(B)$ ;  
 c)  $P(A)$  e  $P(B)$ .

**Questão 25.** Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

**Questão 26.** Considere o sistema linear nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + (\sin \theta) y + 4z = 0 \\ 2x + (1 - \cos 2\theta) y + 16z = 0 \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

- a) Determine  $\theta$  tal que o sistema tenha infinitas soluções.  
b) Para  $\theta$  encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

**Questão 27.** Determine o conjunto de todos os valores de  $x \in [0, 2\pi]$  que satisfazem, simultaneamente, a

$$\frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{\cos x - 1} < 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} x + \sqrt{3} < (1 + \sqrt{3} \operatorname{cotg} x) \operatorname{cotg} x .$$

**Questão 28.** Seis esferas de mesmo raio  $R$  são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta  $2R$ . Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio  $2R$  que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

**Questão 29.** Três circunferências  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão  $\frac{1}{3}$ . A soma dos comprimentos de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  é igual a  $26\pi$  cm. Determine:

- a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$ .  
b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

**Questão 30.** Um cilindro reto de altura  $h = 1$  cm tem sua base no plano  $xy$  definida por

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \leq 0.$$

Um plano, contendo a reta  $y - x = 0$  e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.